Chapter

# 4. 相加平均と相乗平均の関係

相加平均と相乗平均の関係 基礎編

**相加平均と相乗平均の関係**

$a>0,\ b>0$ のとき，

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

【証明】

$a+b-2\sqrt{ab} \geqq 0$ を示す。

$$a+b-2\sqrt{ab} = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$

より，$\sqrt{a}-\sqrt{b}$ は実数なので，

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqq 0$$

よって，$a>0,\ b>0$ のとき，

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$（等号成立条件は $a=b$）

（Q.E.D.）

**前期第 16 回　例題 21**　相加平均・相乗平均の関係(1)

次の値を求めよ。

(1) $x>-1$ のとき，$2x+\dfrac{1}{x+1}$ の最小値

(2) $x>0$ のとき，$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{4}{x}\right)$ の最小値

（目標時間：5 分）

「$>0$」と「相加平均と相乗平均の関係」の記述は忘れずに！

【参考】

どんな最大・最小問題においても，有名不等式は第一選択肢に挙げたいところです。しかし，ただ適応するだけではなく，一工夫必要なものもたくさんあります。それをそれぞれ見ていきましょう。

① そのまま適用すると $2\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}$ となり，なにもうまくいきません。そこで分母が $x+1$ であることに注目し，それと相殺できるように $2x$ の部分を $2x+2-2$ とするとうまくいくでしょう。

② 普通に掛け算をした後に適用する分には問題ありませんが，$\left(x+\dfrac{1}{x}\right),\left(x+\dfrac{4}{x}\right)$ それぞれについて個別に適用し（$2\times4$ としてしまうこと），それをかけてしまうと大問題です。なぜならそれぞれにおいて等号が成立する条件が違うからです。（前者は $x=1$, 後者は $4x=2$）そのため，相加平均・相乗平均の関係は最後にまとめて用いること，そして用いた直後は必ず等号成立条件を確認することを心がけてください。

以前に証明した

$$x^3+y^3+z^3-3xyz \leqq 0$$

が分かれば，相加相乗平均を 3 文字に拡張した関係式の証明もできるので，宿題が終わってなお余力のある人は試してみよう！

【参考】

https://mmsankosho.com/3kousoukasoujounoshoumeinoyarikata/

➡ 将来的には $n$ 個に拡張した証明もやります。

（問題集 p.35〜p.38）